EXERCICES

Exercice 1 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{Un}{2+Un^2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $Un > 0$

2°/a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

b) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} : \; Un \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/Montrer que (U_n) est convergente vers 0

4°/Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a) Montrer que (S_n) est croissante

b) Montrer que $S_n \leq 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

c) En déduire que (S_n) est convergente vers un réel $\ell \in [1,2]$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n{}^2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < U_n < 1$

2°/

a) Montrer que (U_n) est une suite croissante

b) Montrer que (U_n) est convergente

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

3°/ $V_n = \dfrac{1-U_n}{1+U_n}$